Models semistables de corbes modulars

Xavier Xarles

29 de Gener de 2016

La Perfecció és Feixista!

La Perfecció és Feixista!

Carles Hac Mor

Dedicat a

Dedicat a

Robert Coleman

Dedicat a

Pilar Bayer

Models enters

Sigui R un domini i K el cos de fraccions.
Donada una varietat X definidad sobre K, un R-model $\mathcal{X}$ de X és un esquema (amb bones propietats com pla, normal, integral, propi) sobre R tal que $\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$.

Models enters

Sigui R un domini i K el cos de fraccions.
Donada una varietat X definidad sobre K, un R-model $\mathcal{X}$ de X és un esquema (amb bones propietats com pla, normal, integral, propi) sobre R tal que $\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$.
Per exemple, si X és una hipersuperficie donada per una equació $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, podem prendre com a model el donat per la equació $df(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ per un cert $d \in R$ (de manera que la reducció no sigui 0).

Models enters

Sigui R un domini i K el cos de fraccions.
Donada una varietat X definidad sobre K, un R-model $\mathcal{X}$ de X és un esquema (amb bones propietats com pla, normal, integral, propi) sobre R tal que $\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$.
Per exemple, si X és una hipersuperficie donada per una equació $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, podem prendre com a model el donat per la equació $df(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ per un cert $d \in R$ (de manera que la reducció no sigui 0).
En general si $X = \mathrm{Spec}(K[x_1, \ldots, x_n]/I)$ per un cert ideal I, podem prendre $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(R[x_1, \ldots, x_n]/(I \cap R[x_1, \ldots, x_n]))$

Models enters

Sigui R un domini i K el cos de fraccions.
Donada una varietat X definidad sobre K, un R-model $\mathcal{X}$ de X és un esquema (amb bones propietats com pla, normal, integral, propi) sobre R tal que $\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$.
Per exemple, si X és una hipersuperficie donada per una equació $f(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$, podem prendre com a model el donat per la equació $df(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ per un cert $d \in R$ (de manera que la reducció no sigui 0).
En general si $X = \mathrm{Spec}(K[x_1, \dots, x_n]/I)$ per un cert ideal I, podem prendre $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(R[x_1, \dots, x_n]/(I \cap R[x_1, \dots, x_n]))$
Compte! Depen de la presentació de X dins de l'espai afí.

Models enters

Sigui R un domini i K el cos de fraccions.
Donada una varietat X definidad sobre K, un R-model $\mathcal{X}$ de X és un esquema (amb bones propietats com pla, normal, integral, propi) sobre R tal que $\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$.
Per exemple, si X és una hipersuperficie donada per una equació $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, podem prendre com a model el donat per la equació $df(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ per un cert $d \in R$ (de manera que la reducció no sigui 0).
En general si $X = \mathrm{Spec}(K[x_1, \ldots, x_n]/I)$ per un cert ideal I, podem prendre $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(R[x_1, \ldots, x_n]/(I \cap R[x_1, \ldots, x_n]))$
Compte! Depen de la presentació de X dins de l'espai afí.
Eslogan: Les subvarietats afins de $\mathbb{A}^n$ tenen models (que depenen de la immersió).

Models enters

Sigui R un domini i K el cos de fraccions.
Donada una varietat X definidad sobre K, un R-model $\mathcal{X}$ de X és un esquema (amb bones propietats com pla, normal, integral, propi) sobre R tal que $\mathcal{X} \otimes_R K \cong X$.
Per exemple, si X és una hipersuperficie donada per una equació $f(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$, podem prendre com a model el donat per la equació $df(x_1, \dots, x_n) \in K[x_1, \dots, x_n]$ per un cert $d \in R$ (de manera que la reducció no sigui 0).
En general si $X = \mathrm{Spec}(K[x_1, \dots, x_n]/I)$ per un cert ideal I, podem prendre $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(R[x_1, \dots, x_n]/(I \cap R[x_1, \dots, x_n]))$
Compte! Depen de la presentació de X dins de l'espai afí.
Eslogan: Les subvarietats afins de $\mathbb{A}^n$ tenen models (que depenen de la immersió).
Molt més general: si $X \hookrightarrow Y$ és una immersió tancada, i $\mathcal{Y}$ és un R-model, podem prendre $\mathcal{X}$ la clausura esquemàtica de X dins de $\mathcal{Y}$ com a model.
Per exemple, quan $Y = \mathbb{P}^n$.

Models en el cas analític: versió rigida-analítica

Suposem K un cos complet per un valor absolut no arquimedià, i R l'anell d'enters

$$R = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

Models en el cas analític: versió rigida-analítica

Suposem K un cos complet per un valor absolut no arquimedià, i R l'anell d'enters

$$R = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

Si A és una K-algebra de Banach-Tate, aleshores

$$A^0 = \{x \in A \mid \|x\| \leq 1\} = \{x \in A \mid \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ és afitat } \}$$

és una R-àlgebra.

Models en el cas analític: versió rigida-analítica

Suposem K un cos complet per un valor absolut no arquimedià, i R l'anell d'enters

$$R = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

Si A és una K-algebra de Banach-Tate, aleshores

$$A^0 = \{x \in A \mid \|x\| \leq 1\} = \{x \in A \mid \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ és afitat } \}$$

és una R-àlgebra.

Si prenem $X = \mathrm{Spm}(A)$ la varietat rígida analítica associada, aleshores $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A^0)$ és un model enter (formal!).

Models en el cas analític: versió rigida-analítica

Suposem K un cos complet per un valor absolut no arquimedià, i R l'anell d'enters

$$R = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

Si A és una K-algebra de Banach-Tate, aleshores

$$A^0 = \{x \in A \mid \|x\| \leq 1\} = \{x \in A \mid \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ és afitat } \}$$

és una R-àlgebra.
Si prenem $X = \mathrm{Spm}(A)$ la varietat rígida analítica associada, aleshores $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A^0)$ és un model enter (formal!).
Eslògan: Les varietats afinoïdes tenen models canònics.

Models en el cas analític: versió rigida-analítica

Suposem K un cos complet per un valor absolut no arquimedià, i R l'anell d'enters

$$R = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

Si A és una K-algebra de Banach-Tate, aleshores

$$A^0 = \{x \in A \mid \|x\| \leq 1\} = \{x \in A \mid \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ és afitat } \}$$

és una R-àlgebra.
Si prenem $X = \mathrm{Spm}(A)$ la varietat rígida analítica associada, aleshores $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A^0)$ és un model enter (formal!).
Eslògan: Les varietats afinoïdes tenen models canònics.
Exemple: Per l'àlgebra de Tate

$$A := K\langle T_1, \ldots, T_n \rangle = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \mid \lim_{i \to \infty} |a_i| = 0\}$$

tenim

$$A^0 := R\langle T_1, \ldots, T_n \rangle = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \mid a_i \in R \ \lim_{i \to \infty} |a_i| = 0\}.$$

Models en el cas analític: versió àdica

Suposem K un cos complet per un valor absolut no arquimedià, i R l'anell d'enters

$$R = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

Si A és una algebra de Banach, aleshores

$$A^0 = \{x \in A \mid \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ és afitat } \}$$

és una R-àlgebra.
Si prenem $X = \mathrm{Spa}(A, A^+)$ la varietat àdica associada (a un subanell $A^+ \subset A^0$), aleshores $\mathcal{X} = \mathrm{Spa}(A^0, A^+)$ és un model enter (adic).
Eslògan: Les varietats afinoïdes tenen models canònics.

Models i recobriments

Supossem ara que X és una varietat analítica (rigida o àdica). Si tenim un recobriment per oberts affinoïdes $X = \bigcup Z_i$, Z_i afinoïdes, de manera que $Z_{ij} := Z_i \cap Z_j$ és afinoïde, podem construir un model $\mathcal{X} = \bigcup \mathcal{Z}_i$, enganxant els $\mathcal{Z}_i$ a través dels $\mathcal{Z}_{ij}$.

Models i recobriments

Supossem ara que X és una varietat analítica (rigida o àdica). Si tenim un recobriment per oberts affinoïdes $X = \bigcup Z_i$, Z_i afinoïdes, de manera que $Z_{ij} := Z_i \cap Z_j$ és afinoïde, podem construir un model $\mathcal{X} = \bigcup \mathcal{Z}_i$, enganxant els $\mathcal{Z}_i$ a través dels $\mathcal{Z}_{ij}$.
I a l'inrevés: tot model "prou bo"de X s'obté d'un tal recobriment affinoide.

Models i recobriments

Supossem ara que X és una varietat analítica (rigida o àdica). Si tenim un recobriment per oberts affinoïdes $X = \bigcup Z_i$, Z_i afinoïdes, de manera que $Z_{ij} := Z_i \cap Z_j$ és afinoïde, podem construir un model $\mathcal{X} = \bigcup \mathcal{Z}_i$, enganxant els $\mathcal{Z}_i$ a través dels $\mathcal{Z}_{ij}$.
I a l'inrevés: tot model "prou bo"de X s'obté d'un tal recobriment affinoide.
Eslògan: És el mateix donar un model enter (prou bo: quasicompacte) que donar un recobriment (prou bo: finit i amb interseccions quasicompactes) per afinoïdes.
No totes les varietats analítiques tenen tals models: ho tenen les que són quasicompactes i quasiseparades.

Exemples

Si prenem dues boles unitat en dimensió 1: $\mathbb{B} := Spm(K\langle T\rangle)$, i les ajuntem via el cercle de radi 1 $\mathbb{S} := Spm(K\langle T, T^{-1}\rangle)$, obtenim $\mathbb{P}^{1,an}$.

Exemples

Si prenem dues boles unitat en dimensió 1: $\mathbb{B} := Spm(K\langle T\rangle)$, i les ajuntem via el cercle de radi 1 $\mathbb{S} := Spm(K\langle T, T^{-1}\rangle)$, obtenim $\mathbb{P}^{1,an}$.

Concretament prenem els morfismes

$$K\langle T\rangle \hookrightarrow K\langle T, T^{-1}\rangle \hookleftarrow K\langle T^{-1}\rangle$$

Exemples

Si prenem dues boles unitat en dimensió 1: $\mathbb{B} := Spm(K\langle T\rangle)$, i les ajuntem via el cercle de radi 1 $\mathbb{S} := Spm(K\langle T, T^{-1}\rangle)$, obtenim $\mathbb{P}^{1,an}$.
Concretament prenem els morfismes

$$K\langle T\rangle \hookrightarrow K\langle T, T^{-1}\rangle \hookleftarrow K\langle T^{-1}\rangle$$

Per obtenir la recta afí $\mathbb{A}^1$ no ho podem fer amb un nombre finit de afinoides. Podem prendre per exemple un recobriment en boles tancades de radi creixent, o bé un recorbiment amb una bola de radi 1 i després corones de cada cop més grosses.

Fibra genèrica d'esquemes formals

Un esquema formal $\mathcal{X}$ sobre R que sigui prou bo (per exemple, la completació formal d'un esquema de presentació finita X_R sobre R), aleshores tenim un fibra genèrica associada $\mathcal{X}_K$.

Fibra genèrica d'esquemes formals

Un esquema formal $\mathcal{X}$ sobre R que sigui prou bo (per exemple, la completació formal d'un esquema de presentació finita X_R sobre R), aleshores tenim un fibra genèrica associada $\mathcal{X}_K$.
Per exemple, si $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A)$ amb A adequat, aleshores $\mathcal{X}_K := \mathrm{Spm}(A \widehat{\otimes}_R K)$.

Fibra genèrica d'esquemes formals

Un esquema formal $\mathcal{X}$ sobre R que sigui prou bo (per exemple, la completació formal d'un esquema de presentació finita X_R sobre R), aleshores tenim un fibra genèrica associada $\mathcal{X}_K$.
Per exemple, si $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A)$ amb A adequat, aleshores $\mathcal{X}_K := \mathrm{Spm}(A \widehat{\otimes}_R K)$.
Compte: No és cert que si X_R és un esquema sobre R de presentació finita, amb $\mathcal{X}$ completat formal, aleshores $\mathcal{X}_K \cong (X_R \otimes_R K)^{an}$, tot i que si que hi ha un morfisme del primer al segon.

Fibra genèrica d'esquemes formals

Un esquema formal $\mathcal{X}$ sobre R que sigui prou bo (per exemple, la completació formal d'un esquema de presentació finita X_R sobre R), aleshores tenim un fibra genèrica associada $\mathcal{X}_K$.
Per exemple, si $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A)$ amb A adequat, aleshores $\mathcal{X}_K := \mathrm{Spm}(A\widehat{\otimes}_R K)$.
Compte: No és cert que si X_R és un esquema sobre R de presentació finita, amb $\mathcal{X}$ completat formal, aleshores $\mathcal{X}_K \cong (X_R \otimes_R K)^{an}$, tot i que si que hi ha un morfisme del primer al segon.
És un isomorfisme, però, si X_R és propi.

El morfisme reducció

Si A és una K-àlgebra de Tate (o sigui un quocient de l'àlgebra de series convergents en varies variables), aleshores

$$A^{00} = \{x \in A \mid \|x\| < 1\} \subset A^0$$

és un ideal.

El morfisme reducció

Si A és una K-àlgebra de Tate (o sigui un quocient de l'àlgebra de series convergents en varies variables), aleshores

$$A^{00} = \{x \in A \mid \|x\| < 1\} \subset A^0$$

és un ideal.
L'anell $\overline{A} := A^0/A^{00}$ és una k-àlgebra finitament generada, i tenim el morfisme reducció

$$\mathrm{Spm}(A) \to \mathrm{Spec}(\overline{A})$$

i

$$\mathrm{Spa}(A, A^0) \twoheadrightarrow \mathrm{Spec}(\overline{A})$$

(aquest darrer exhaustiu)

El morfisme reducció

Si A és una K-àlgebra de Tate (o sigui un quocient de l'àlgebra de series convergents en varies variables), aleshores

$$A^{00} = \{x \in A \mid \|x\| < 1\} \subset A^0$$

és un ideal.
L'anell $\overline{A} := A^0/A^{00}$ és una k-àlgebra finitament generada, i tenim el morfisme reducció

$$\mathrm{Spm}(A) \to \mathrm{Spec}(\overline{A})$$

i

$$\mathrm{Spa}(A, A^0) \twoheadrightarrow \mathrm{Spec}(\overline{A})$$

(aquest darrer exhaustiu)
Es descriu de la següent manera: a una valoració li assignem el seu nucli, que està dins de A^0, i després fem mòdul A^{00}.

El morfisme reducció II

Si tenim un recobriment prou bo per affinoides d'una varietat analítica X, i prenem el model formal associat $\mathcal{X}$, tenim de manera natural una fibra especial $\overline{X}$ que ens dóna una esquema sobre k.

El morfisme reducció II

Si tenim un recobriment prou bo per affinoides d'una varietat analítica X, i prenem el model formal associat $\mathcal{X}$, tenim de manera natural una fibra especial $\overline{X}$ que ens dóna una esquema sobre k.
El morfisme reducció per afinoides ens dóna un morfisme reducció

$$red : X^{an} \to \overline{X}.$$

Exemples

Per l'àlgebra de Tate tenim

$$A^0 := R\langle T_1, \ldots, T_n \rangle$$

i

$$\overline{A} = k[T_1, \ldots, T_n].$$

El morfisme reducció envia un element de

$$\mathrm{Spm}(A)(K) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \mid |a_i| \leq 1 \forall i\}$$

a la seva reducció modul el ideal maximal de K.

Exemples

Per l'àlgebra de Tate tenim

$$A^0 := R\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$$

i

$$\overline{A} = k[T_1, \ldots, T_n].$$

El morfisme reducció envia un element de

$$\mathrm{Spm}(A)(K) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \mid |a_i| \leq 1 \forall i\}$$

a la seva reducció modul el ideal maximal de K.

Per $\mathbb{P}^1$ amb el recobriment descrit abans, la reducció és $\mathbb{P}^1_k$ i el morfisme reducció envia un punt $[a : b] \in \mathbb{P}^1(K)$, on $a, b \in R$, primers entre si, a la seva reducció modul el maximal $[\bar{a}, \bar{b}] \in \mathbb{P}^1(k)$.

Models semiestables

Suposem X és ara una corba (algebraica) sobre K, llisa i projectiva.

Models semiestables

Supossem X és ara una corba (algebraica) sobre K, llisa i projectiva.
Un model semiestable $\mathcal{X}$ de X és un model propi amb fibra especial $\mathcal{X}_k$ tal que les components irreductibles de $\mathcal{X}_k$ verifiquen que

Models semiestables

Supossem X és ara una corba (algebraica) sobre K, llisa i projectiva.
Un model semiestable $\mathcal{X}$ de X és un model propi amb fibra especial $\mathcal{X}_k$ tal que les components irreductibles de $\mathcal{X}_k$ verifiquen que

- són llises,

Models semiestables

Supossem X és ara una corba (algebraica) sobre K, llisa i projectiva.
Un model semiestable $\mathcal{X}$ de X és un model propi amb fibra especial $\mathcal{X}_k$ tal que les components irreductibles de $\mathcal{X}_k$ verifiquen que

- són llises,
- les de gènere 0 tallen a les altres en com a mínim 2 punts,

Models semiestables

Supossem X és ara una corba (algebraica) sobre K, llisa i projectiva.
Un model semiestable $\mathcal{X}$ de X és un model propi amb fibra especial $\mathcal{X}_k$ tal que les components irreductibles de $\mathcal{X}_k$ verifiquen que

- són llises,
- les de gènere 0 tallen a les altres en com a mínim 2 punts,
- tres a tres no es tallen,

Models semiestables

Supossem X és ara una corba (algebraica) sobre K, llisa i projectiva.
Un model semiestable $\mathcal{X}$ de X és un model propi amb fibra especial $\mathcal{X}_k$ tal que les components irreductibles de $\mathcal{X}_k$ verifiquen que

- són llises,
- les de gènere 0 tallen a les altres en com a mínim 2 punts,
- tres a tres no es tallen,

i a més el completat formal de $\mathcal{X}$ en un punt singular x de la reducció és isomorf a $R[[x, y]]/(xy - \alpha)$, on α és un **pseudouniformitzant** (i.e. $|\alpha| < 1$).

Models semiestables

Supossem X és ara una corba (algebraica) sobre K, llisa i projectiva.
Un model semiestable $\mathcal{X}$ de X és un model propi amb fibra especial $\mathcal{X}_k$ tal que les components irreductibles de $\mathcal{X}_k$ verifiquen que

- són llises,
- les de gènere 0 tallen a les altres en com a mínim 2 punts,
- tres a tres no es tallen,

i a més el completat formal de $\mathcal{X}$ en un punt singular x de la reducció és isomorf a $R[[x, y]]/(xy - \alpha)$, on α és un **pseudouniformitzant** (i.e. $|\alpha| < 1$).
Compte! Semiestable en el cas de valoració discreta demana normalment α uniformitzant.

Models semiestables

Supossem X és ara una corba (algebraica) sobre K, llisa i projectiva.
Un model semiestable $\mathcal{X}$ de X és un model propi amb fibra especial $\mathcal{X}_k$ tal que les components irreductibles de $\mathcal{X}_k$ verifiquen que

- són llises,
- les de gènere 0 tallen a les altres en com a mínim 2 punts,
- tres a tres no es tallen,

i a més el completat formal de $\mathcal{X}$ en un punt singular x de la reducció és isomorf a $R[[x, y]]/(xy - \alpha)$, on α és un **pseudouniformitzant** (i.e. $|\alpha| < 1$).
Compte! Semiestable en el cas de valoració discreta demana normalment α uniformitzant.
Podem passar de una versió a l'altre fent uns quants esclataments (blow-ups) adequats.

Corbes molt obertes (a la Coleman)

Una corba molt oberta (wide open curve) és un espai analític isomorf al complementari (de l'analitificació) d'una corba llisa i projectiva C menys un nombre finit de boles tancades D_i, $i \in I$.

Corbes molt obertes (a la Coleman)

Una corba molt oberta (wide open curve) és un espai analític isomorf al complementari (de l'analitificació) d'una corba llisa i projectiva C menys un nombre finit de boles tancades D_i, $i \in I$.

Per exemple, els discs oberts $\mathbb{B}^{-}(r)$ amb punts racionals

$$\mathbb{B}^{-}(r)(K) := \{x \in K \mid |x| < r\}$$

Corbes molt obertes (a la Coleman)

Una corba molt oberta (wide open curve) és un espai analític isomorf al complementari (de l'analitificació) d'una corba llisa i projectiva C menys un nombre finit de boles tancades D_i, $i \in I$.

Per exemple, els discs oberts $\mathbb{B}^-(r)$ amb punts racionals

$$\mathbb{B}^-(r)(K) := \{x \in K \mid |x| < r\}$$

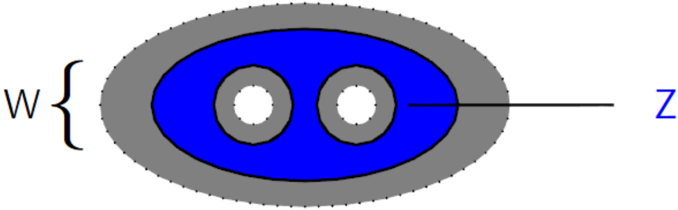
o les corones obertes $C(s,r)^-$ amb punts racionals

$$C(s,r)^-(K) := \{x \in K \mid s < |x| < r\}$$

on $s < r$ són nombres reals de $|K|$.

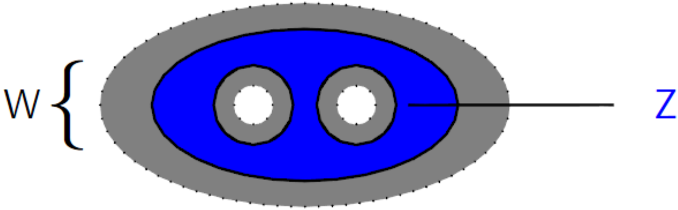
Affinoides subjacents

Un affinoide subjacent Z a una corba molt oberta W és un sub-domini affinoide de $Z \subset W$ isomorf a un affinoide, i de manera que $W \setminus X$ és isomorf a una unio disjunta d'un nombre finit de corones obertes, cap d'elles continguda en un subdomini affinoide de W.



Affinoides subjacents

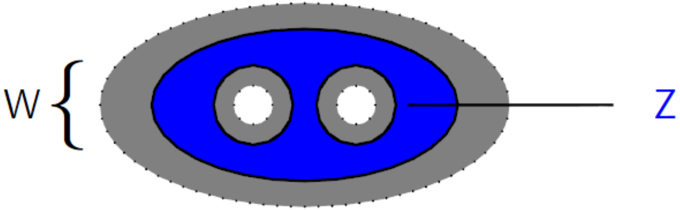
Un affinoide subjacent Z a una corba molt oberta W és un sub-domini affinoide de $Z \subset W$ isomorf a un affinoide, i de manera que $W \setminus X$ és isomorf a una unio disjunta d'un nombre finit de corones obertes, cap d'elles continguda en un subdomini affinoide de W.



Per exemple, $\mathbb{B}(s) \subset \mathbb{B}^{-}(r)$ amb $s < r$

Affinoides subjacents

Un affinoide subjacent Z a una corba molt oberta W és un sub-domini affinoide de $Z \subset W$ isomorf a un affinoide, i de manera que $W \setminus X$ és isomorf a una unio disjunta d'un nombre finit de corones obertes, cap d'elles continguda en un subdomini affinoide de W.



Per exemple, $\mathbb{B}(s) \subset \mathbb{B}^-(r)$ amb $s < r$
o

$$C(s', r') \subset C(s, r)^-$$

on $s < s' \leq r' < r$ són nombres reals de $|K|$.

Corbes molt obertes i reducció

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.

Corbes molt obertes i reducció

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.
Si $x \in \mathcal{C}_k(k)$ és un punt racional, aleshores $red^{-1}(x)$ es pot dotar d'estructura de molt obert dins de C^{an}.

Corbes molt obertes i reducció

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$. Si $x \in \mathcal{C}_k(k)$ és un punt racional, aleshores $red^{-1}(x)$ es pot dotar d'estructura de molt obert dins de C^{an}.
Per exemple, si x és un punt no singular, aleshores $red^{-1}(x) \cong \mathbb{B}^-(K)$.

Corbes molt obertes i reducció

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$. Si $x \in \mathcal{C}_k(k)$ és un punt racional, aleshores $red^{-1}(x)$ es pot dotar d'estructura de molt obert dins de C^{an}.
Per exemple, si x és un punt no singular, aleshores $red^{-1}(x) \cong \mathbb{B}^-(K)$.
Si x és un punt doble, aleshores $red^{-1}(x) = C(s, r)^-(K)$ per certs $r < s$.

Corbes molt obertes i reducció

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.
Si $x \in \mathcal{C}_k(k)$ és un punt racional, aleshores $red^{-1}(x)$ es pot dotar d'estructura de molt obert dins de C^{an}.
Per exemple, si x és un punt no singular, aleshores $red^{-1}(x) \cong \mathbb{B}^{-}(K)$.
Si x és un punt doble, aleshores $red^{-1}(x) = C(s,r)^{-}(K)$ per certs $r < s$.
En general, si $\mathcal{C}_k$ té r-branques a x, $red^{-1}(x)$ és isomorf a la bola oberta de radi 1 menys r-boles tancades disjuntes de radiis a $|K|$.

Corbes molt obertes i reducció

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.
Si $x \in \mathcal{C}_k(k)$ és un punt racional, aleshores $red^{-1}(x)$ es pot dotar d'estructura de molt obert dins de C^{an}.
Per exemple, si x és un punt no singular, aleshores $red^{-1}(x) \cong \mathbb{B}^{-}(K)$.
Si x és un punt doble, aleshores $red^{-1}(x) = C(s,r)^{-}(K)$ per certs $r < s$.
En general, si $\mathcal{C}_k$ té r-branques a x, $red^{-1}(x)$ és isomorf a la bola oberta de radi 1 menys r-boles tancades disjuntes de radiis a $|K|$.
Observeu que la fibra genèrica del "nostre" M_n és una corba molt oberta.

Recobriments per corbes molt obertes

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.

Recobriments per corbes molt obertes

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.
Sigui $\overline{C_i}$ una component irreductible de la fibra especial de $\mathcal{C}$.

Recobriments per corbes molt obertes

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.
Sigui $\overline{C_i}$ una component irreductible de la fibra especial de $\mathcal{C}$.

Considerem $U_i := red^{-1}(\overline{C_i})$.

Recobriments per corbes molt obertes

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.
Sigui $\overline{C_i}$ una component irreductible de la fibra especial de $\mathcal{C}$.

Considerem $U_i := red^{-1}(\overline{C_i})$.
Aleshores U_i és una corba molt oberta.

Recobriments per corbes molt obertes

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.
Sigui $\overline{C_i}$ una component irreductible de la fibra especial de $\mathcal{C}$.

Considerem $U_i := red^{-1}(\overline{C_i})$.
Aleshores U_i és una corba molt oberta.

Si fem això per a cada component irreductible de $\mathcal{C}_k$ obtindrem un recobriment de C^{an} per corbes molt obertes.

Recobriments per corbes molt obertes

Sigui C és una corba projectiva i llisa amb model propi i pla $\mathcal{C}$.
Sigui $\overline{C_i}$ una component irreductible de la fibra especial de $\mathcal{C}$.

Considerem $U_i := red^{-1}(\overline{C_i})$.
Aleshores U_i és una corba molt oberta.

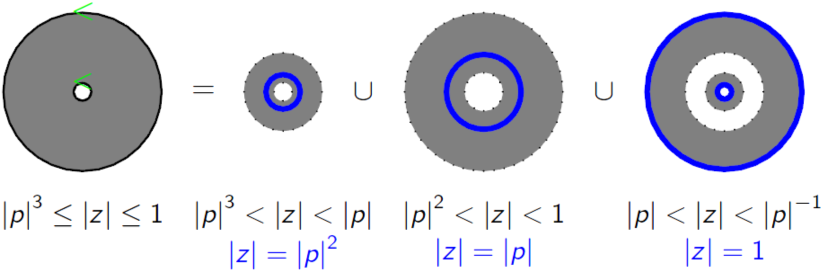
Si fem això per a cada component irreductible de $\mathcal{C}_k$ obtindrem un recobriment de C^{an} per corbes molt obertes.
A l'inrevés, tot recobriment "adequat" per a corbes molt obertes ens donarà un model formal de C.

Un exemple per gènere 1

Prenem un corba el·líptica de Tate E amb $q = p^3$ (el mateix serviria si q és un cub).
Aleshores E^{an} és isomorfa a la corona $C(|p|^3, 1)$ identificant el cercle de radi $|p^3|$ amb el de radi 1 via "multiplicar per p^3.
Prenem les corones obertes $C_1 = C^-(|p|^3, |p|)$, $C_2^- = C(|p^2|, 1)$ i $C_3^- = C(|p|, |p|^{-1})$.

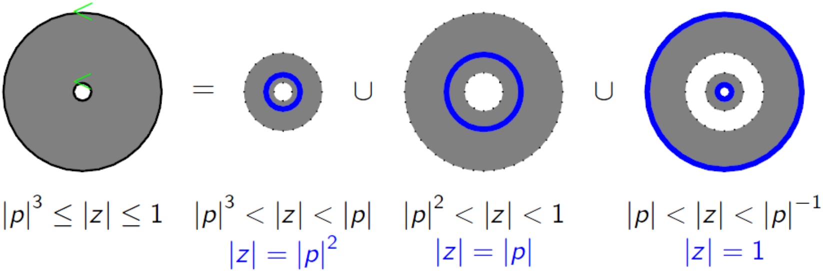
Un exemple per gènere 1

Prenem un corba el·líptica de Tate E amb $q = p^3$ (el mateix serviria si q és un cub).
Aleshores E^{an} és isomorfa a la corona $C(|p|^3, 1)$ identificant el cercle de radi $|p^3|$ amb el de radi 1 via "multiplicar per p^3.
Prenem les corones obertes $C_1 = C^-(|p|^3, |p|)$, $C_2^- = C(|p^2|, 1)$ i $C_3^- = C(|p|, |p|^{-1})$.



Un exemple per gènere 1

Prenem un corba el·líptica de Tate E amb $q = p^3$ (el mateix serviria si q és un cub).
Aleshores E^{an} és isomorfa a la corona $C(|p|^3, 1)$ identificant el cercle de radi $|p^3|$ amb el de radi 1 via "multiplicar per p^3.
Prenem les corones obertes $C_1 = C^-(|p|^3, |p|)$, $C_2^- = C(|p^2|, 1)$ i $C_3^- = C(|p|, |p|^{-1})$.



A més $C_i \setminus (C_j \cup C_k)$ és el cercle $C(|p|^2, |p|^2)$, $C(|p|, |p|)$ i $C(1, 1)$, respectivament.
La reducció són 3 $\mathbb{P}^1$, tallant-se "en forma circular".

Recobriment semiestables per molt oberts

Sigui C l'analificació d'una corba llisa i projectiva (o més en general, una corba molt oberta).

Recobriment semiestables per molt oberts

Sigui C l'analificació d'una corba llisa i projectiva (o més en general, una corba molt oberta).
Un recobriment $\{W_i\}_{i \in I}$ de C per molts oberts és un recobriment semiestable si $|I| > 1$ i

- $W_i \cap W_j$ amb $i \neq j$ és una unió disjunta d'un nombre finit de corones obertes (o el buit),

Recobriment semiestables per molt oberts

Sigui C l'analificació d'una corba llisa i projectiva (o més en general, una corba molt oberta).
Un recobriment $\{W_i\}_{i\in I}$ de C per molts oberts és un recobriment semiestable si $|I| > 1$ i

- $W_i \cap W_j$ amb $i \neq j$ és una unió disjunta d'un nombre finit de corones obertes (o el buit),
- $W_i \cap W_j \cap W_k = \emptyset$ si $i \neq j \neq k \neq i$,

Recobriment semiestables per molt oberts

Sigui C l'analificació d'una corba llisa i projectiva (o més en general, una corba molt oberta).
Un recobriment $\{W_i\}_{i\in I}$ de C per molts oberts és un recobriment semiestable si $|I| > 1$ i

- $W_i \cap W_j$ amb $i \neq j$ és una unió disjunta d'un nombre finit de corones obertes (o el buit),
- $W_i \cap W_j \cap W_k = \emptyset$ si $i \neq j \neq k \neq i$,
- $Z_i := W_i \setminus \bigcup_{j\in I, j\neq i} W_j$ és un affinoide subjacent amb bona reducció.

Exemples

El cas de la corba el·lítica de Tate que hem explicat era un recobriment semiestable.

Exemples

El cas de la corba el·lítica de Tate que hem explicat era un recobriment semiestable.

Un recobriment semiestable per molt oberts de $\mathbb{B}^-$ és necessariament infinit:

Exemples

El cas de la corba el·lítica de Tate que hem explicat era un recobriment semiestable.

Un recobriment semiestable per molt oberts de $\mathbb{B}^-$ és necessariament infinit:
Prenem $W_0 := \{z \ : \ |z| < |p^{1/2}|\}$,

$$W_i := \{z \ : \ |p|^{\frac{1}{n}} < |z| < |p|^{\frac{1}{n+2}}\}.$$

Recobriments semiestables versus models semiestables.

És el mateix donar un recobriment semiestable finit de C^{an} per molt oberts, que un model semiestable de C (que no sigui de bona reducció).

Recobriments semiestables versus models semiestables.

És el mateix donar un recobriment semiestable finit de C^{an} per molt oberts, que un model semiestable de C (que no sigui de bona reducció).

Per una banda, donat un model semiestable amb reducció

$$\mathcal{C}_k := \bigcup_{i \in I} \overline{C_i}$$

on $\overline{C_i}$ son les components irreductibles, aleshores $W_i := red^{-1}(\overline{C_i})$ és un recobriment semiestable.

Recobriments semiestables versus models semiestables.

És el mateix donar un recobriment semiestable finit de C^{an} per molt oberts, que un model semiestable de C (que no sigui de bona reducció).

Recobriments semiestables versus models semiestables.

És el mateix donar un recobriment semiestable finit de C^{an} per molt oberts, que un model semiestable de C (que no sigui de bona reducció).

D'altra banda, si tenim un recobriment semiestable, aleshores $\mathcal{Z}_i := \mathrm{Spf}(\mathcal{O}^+(Z_i))$, on $\mathcal{O}^+(Z)$ son els elements de $\mathcal{O}(Z)$ amb norma ≤ 1. Els enganxem entre si utilitzant $\mathcal{Z}_{i,j} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}^+(Z_i \cup (W_i \cap W_j) \cup Z_j))$ (la reducció dels quals serà dos components tallant-se en punts dobles).

Recobriments semiestables versus models semiestables.

És el mateix donar un recobriment semiestable finit de C^{an} per molt oberts, que un model semiestable de C (que no sigui de bona reducció).

D'altra banda, si tenim un recobriment semiestable, aleshores $\mathcal{Z}_i := \mathrm{Spf}(\mathcal{O}^+(Z_i))$, on $\mathcal{O}^+(Z)$ son els elements de $\mathcal{O}(Z)$ amb norma ≤ 1. Els enganxem entre si utilitzant $\mathcal{Z}_{i,j} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}^+(Z_i \cup (W_i \cap W_j) \cup Z_j))$ (la reducció dels quals serà dos components tallant-se en punts dobles).

La reducció del model obtingut té com a components irreductibles les corbes llises i projectives associades a les reduccions dels affinoides subjacents Z_i, enganxades entre si sempre que la intersecció sigui no buida.

Objectiu

Recordem $K = \mathbb{Q}_p$ (o un cos p-adic), k cos residual amb q elements, q **senar**, π un uniformitzant.

Objectiu

Recordem $K = \mathbb{Q}_p$ (o un cos p-adic), k cos residual amb q elements, q **senar**, π un uniformitzant.

Volem construir models semiestables de les corbes modulars X_n.

Objectiu

Recordem $K = \mathbb{Q}_p$ (o un cos p-adic), k cos residual amb q elements, q **senar**, π un uniformitzant.

Volem construir models semiestables de les corbes modulars X_n.

De fet, el que volem és determinar quines corbes poden apareixer a la reducció dels models semiestables de les corbes modulars X_n,

Objectiu

Recordem $K = \mathbb{Q}_p$ (o un cos p-adic), k cos residual amb q elements, q **senar**, π un uniformitzant.

Volem construir models semiestables de les corbes modulars X_n.

De fet, el que volem és determinar quines corbes poden apareixer a la reducció dels models semiestables de les corbes modulars X_n, i també com estan posicionades unes amb altres.

Traducció a recobriments semiestables.

Traducció a recobriments semiestables.

El que farem serà construir un recobriment semiestable (infinit) de la fibra genèrica de $M_{n,\overline{\eta}}$

Traducció a recobriments semiestables.

El que farem serà construir un recobriment semiestable (infinit) de la fibra genèrica de $M_{n,\overline{\eta}}$ (de fet de $M_{n,\overline{\eta}}$ menys els punts CM).

Traducció a recobriments semiestables.

El que farem serà construir un recobriment semiestable (infinit) de la fibra genèrica de $M_{n,\overline{\eta}}$ (de fet de $M_{n,\overline{\eta}}$ menys els punts CM). D'aquest recobriment podem obtenir un recobriment finit de la corba modular X_n via el següent procediment.

Traducció a recobriments semiestables.

El que farem serà construir un recobriment semiestable (infinit) de la fibra genèrica de $M_{n,\overline{\eta}}$ (de fet de $M_{n,\overline{\eta}}$ menys els punts CM). D'aquest recobriment podem obtenir un recobriment finit de la corba modular X_n via el següent procediment.

$$X_n^{an} := \bigsqcup red^{-1}(Ig^*) \sqcup \bigsqcup_{x \text{ supersing}} red^{-1}(x)$$

on Ig^* són les components irreductibles menys els punts singulars (són corbes d'Igusa de corbes el·líptiques amb estructura d'Igusa p^n i punt de N-torsió) i $red^{-1}(x) \cong M_{n,\overline{\eta}}$.

Traducció a recobriments semiestables.

El que farem serà construir un recobriment semiestable (infinit) de la fibra genèrica de $M_{n,\overline{\eta}}$ (de fet de $M_{n,\overline{\eta}}$ menys els punts CM). D'aquest recobriment podem obtenir un recobriment finit de la corba modular X_n via el següent procediment.

$$X_n^{an} := \bigsqcup red^{-1}(Ig^*) \sqcup \bigsqcup_{x \text{ supersing}} red^{-1}(x)$$

on Ig^* són les components irreductibles menys els punts singulars (són corbes d'Igusa de corbes el·líptiques amb estructura d'Igusa p^n i punt de N-torsió) i $red^{-1}(x) \cong M_{n,\overline{\eta}}$.
Prenem un "tub molt obert" U_I al voltant del affinoide $red^{-1}(Ig^*)$ de manera que U_I talli els molt oberts del recobriment semiestable de $red^{-1}(x)$ anterior en corones.

Traducció a recobriments semiestables.

El que farem serà construir un recobriment semiestable (infinit) de la fibra genèrica de $M_{n,\overline{\eta}}$ (de fet de $M_{n,\overline{\eta}}$ menys els punts CM). D'aquest recobriment podem obtenir un recobriment finit de la corba modular X_n via el següent procediment.

$$X_n^{an} := \bigsqcup red^{-1}(Ig^*) \sqcup \bigsqcup_{x \text{ supersing}} red^{-1}(x)$$

on Ig^* són les components irreductibles menys els punts singulars (són corbes d'Igusa de corbes el·líptiques amb estructura d'Igusa p^n i punt de N-torsió) i $red^{-1}(x) \cong M_{n,\overline{\eta}}$.
Prenem un "tub molt obert" U_I al voltant del affinoide $red^{-1}(Ig^*)$ de manera que U_I talli els molt oberts del recobriment semiestable de $red^{-1}(x)$ anterior en corones.
Hi ha un subrecobriment finit semiestable del recobriment adjuntant els recobriment de cada $red^{-1}(x)$ i els U_I's.

La fibra genèrica de M_∞

Recordem que $M_\infty := \mathrm{Spf}(A_\infty)$, on

$$A_\infty := \text{ La completació de } \varinjlim A_n$$

La fibra genèrica de M_∞

Recordem que $M_\infty := \mathrm{Spf}(A_\infty)$, on

$$A_\infty := \text{ La completació de } \varinjlim A_n$$

La fibra genèrica (sobre $\mathbb{C}_p$) és l'espai àdic $M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}}$ associat a

$$A^0_{\infty,\overline{\eta}} := A_\infty \widehat{\otimes}_R \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \ , \ A_{\infty,\overline{\eta}} = A^0_{\infty,\overline{\eta}}[1/p]$$

La fibra genèrica de M_∞

Recordem que $M_\infty := \mathrm{Spf}(A_\infty)$, on

$$A_\infty := \text{ La completació de } \varinjlim A_n$$

La fibra genèrica (sobre $\mathbb{C}_p$) és l'espai àdic $M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}}$ associat a

$$A^0_{\infty,\overline{\eta}} := A_\infty \widehat{\otimes}_R \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \ , \ A_{\infty,\overline{\eta}} = A^0_{\infty,\overline{\eta}}[1/p]$$

El punt clau és que $A^0_{\infty,\overline{\eta}}$ és una àlgebra perfectoïde!

La fibra genèrica de M_∞

Recordem que $M_\infty := \mathrm{Spf}(A_\infty)$, on

$$A_\infty := \text{ La completació de } \varinjlim A_n$$

La fibra genèrica (sobre $\mathbb{C}_p$) és l'espai àdic $M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}}$ associat a

$$A^0_{\infty,\overline{\eta}} := A_\infty \widehat{\otimes}_R \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \ , \ A_{\infty,\overline{\eta}} = A^0_{\infty,\overline{\eta}}[1/p]$$

El punt clau és que $A^0_{\infty,\overline{\eta}}$ és una àlgebra perfectoïde!

Això és necessari per a poder assegurar que tenim un espai àdic (perfectoïde), concretament que és feixista (sheafy).

La fibra genèrica de M_∞

Recordem que $M_\infty := \mathrm{Spf}(A_\infty)$, on

$$A_\infty := \text{ La completació de } \varinjlim A_n$$

La fibra genèrica (sobre $\mathbb{C}_p$) és l'espai àdic $M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}}$ associat a

$$A^0_{\infty,\overline{\eta}} := A_\infty \widehat{\otimes}_R \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \ , \ A_{\infty,\overline{\eta}} = A^0_{\infty,\overline{\eta}}[1/p]$$

El punt clau és que $A^0_{\infty,\overline{\eta}}$ és una àlgebra perfectoïde!

Això és necessari per a poder assegurar que tenim un espai àdic (perfectoïde), concretament que és feixista (sheafy).

Podeu pensar que $M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}}$ és el conjunt de valoracions continues $|\ |$ a $A^0_{\infty,\overline{\eta}}$ (en el sentit de Huber) tals que $|\pi| \neq 0$.

Accions a M_∞

Tenim una acció natural de

$$GL_2(K) \times D^\times \times W_K$$

a M_∞, on D/K és l'algebra central simple d'invariant $1/2$, i W_K és el grup de Weil de K.

Accions a M_∞

Tenim una acció natural de

$$GL_2(K) \times D^\times \times W_K$$

a M_∞, on D/K és l'algebra central simple d'invariant $1/2$, i W_K és el grup de Weil de K.

M_{infty} és molt disconnex; de fet és un espai homogeni sobre K^*. Si només considerem una component connexa M_∞^0, tenim una acció natural de

$$(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N} := \{(g,u) \mid \det(g) = N(u)\}$$

Accions a M_∞

Tenim una acció natural de

$$GL_2(K) \times D^\times \times W_K$$

a M_∞, on D/K és l'algebra central simple d'invariant $1/2$, i W_K és el grup de Weil de K.

M_{infty} és molt disconnex; de fet és un espai homogeni sobre K^*. Si només considerem una component connexa M_∞^0, tenim una acció natural de

$$(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N} := \{(g, u) \mid \det(g) = N(u)\}$$

Tenim morfismes naturals dins la categoria dels espais àdics

$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{n,\overline{\eta}}$$

$$M^{ad,0}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad,0}_{n,\overline{\eta}}$$

Accions a M_∞

Tenim una acció natural de

$$GL_2(K) \times D^\times \times W_K$$

a M_∞, on D/K és l'algebra central simple d'invariant $1/2$, i W_K és el grup de Weil de K.

M_{infty} és molt disconnex; de fet és un espai homogeni sobre K^*. Si només considerem una component connexa M_∞^0, tenim una acció natural de

$$(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N} := \{(g, u) \mid \det(g) = N(u)\}$$

Tenim morfismes naturals dins la categoria dels espais àdics

$$M_{\infty,\overline{\eta}}^{ad} \to M_{n,\overline{\eta}}^{ad}$$

$$M_{\infty,\overline{\eta}}^{ad,0} \to M_{n,\overline{\eta}}^{ad,0}$$

que consisteixen en fer quocient per un subgrup de congruència del tipus

$$\Gamma(\pi^m) = 1 + \pi^m M_2(\mathcal{O}_K)$$

Descripció explícita de M_∞

Per a construir el recobriment semiestable a $M_{n,\overline{\eta}}$, el que farem serà construir un recobriment del espai perfectoide $M_{\infty,\overline{\eta}}$ que "simula" un recobriment semiestable, i després projectarem.

Descripció explícita de M_∞

Per a construir el recobriment semiestable a $M_{n,\overline{\eta}}$, el que farem serà construir un recobriment del espai perfectoide $M_{\infty,\overline{\eta}}$ que "simula" un recobriment semiestable, i després projectarem.
De fet ho farem de una component connexa $M^0_{\infty,\overline{\eta}}$, i utilitzant el teorema que ens va explicar el Santi.

Descripció explícita de M_∞

Per a construir el recobriment semiestable a $M_{n,\overline{\eta}}$, el que farem serà construir un recobriment del espai perfectoide $M_{\infty,\overline{\eta}}$ que "simula" un recobriment semiestable, i després projectarem.
De fet ho farem de una component connexa $M^0_{\infty,\overline{\eta}}$, i utilitzant el teorema que ens va explicar el Santi.
Aquell teorema ens diu, a la pràctica, que

$$M^{0,ad}_{\infty,\overline{\eta}} \subset \mathbb{A}^{2,perf} = \mathrm{Spa}(R, R^+)$$

on

$$R^+ = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[X_1^{1/p^\infty}, X_2^{1/p^\infty}]]$$

i ve donat per una equació del tipus $\delta(X_1, X_2) = t$,

Descripció explícita de M_∞

Per a construir el recobriment semiestable a $M_{n,\overline{\eta}}$, el que farem serà construir un recobriment del espai perfectoide $M_{\infty,\overline{\eta}}$ que "simula" un recobriment semiestable, i després projectarem.
De fet ho farem de una component connexa $M^0_{\infty,\overline{\eta}}$, i utilitzant el teorema que ens va explicar el Santi.
Aquell teorema ens diu, a la pràctica, que

$$M^{0,ad}_{\infty,\overline{\eta}} \subset \mathbb{A}^{2,perf} = \mathrm{Spa}(R, R^+)$$

on

$$R^+ = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[X_1^{1/p^\infty}, X_2^{1/p^\infty}]]$$

i ve donat per una equació del tipus $\delta(X_1, X_2) = t$,on el morfisme determinant

$$\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[X_1^{1/p^\infty}, X_2^{1/p^\infty}]]) \cong \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \bigwedge \widetilde{G} \cong \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[t^{1/p^\infty}]])$$

ve donat enviant t a $\delta(X_1, X_2)$.

Descripció explícita de M_∞

Encara més explicitament, recordem que en el cas del grup formal G d'altura 1, tenim que $M_m = \mathrm{Spf}(O_{K_m})$, on K_m és el cos adjuntant els punts de π^m-torsió de G.

Descripció explícita de M_∞

Encara més explicitament, recordem que en el cas del grup formal G d'altura 1, tenim que $M_m = \mathrm{Spf}(O_{K_m})$, on K_m és el cos adjuntant els punts de π^m-torsió de G.
I que K_∞ de fet és la maxima extensió abeliana de K (si $K/\mathbb{Q}_p$ és no ramificada) ($\leftrightsquigarrow$ Teoria de cossos de classes local).

Descripció explícita de M_∞

Encara més explicitament, recordem que en el cas del grup formal G d'altura 1, tenim que $M_m = \mathrm{Spf}(O_{K_m})$, on K_m és el cos adjuntant els punts de π^m-torsió de G.
I que K_∞ de fet és la maxima extensió abeliana de K (si $K/\mathbb{Q}_p$ és no ramificada) ($\leftrightsquigarrow$ Teoria de cossos de classes local).
Per fer el canvi de base a $\mathbb{C}_p$ ens cal elegir un element t de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, topologicament nilpotent, i una colecció compatible d'arrels t^{1/q^n}.

Descripció explícita de M_∞

Encara més explicitament, recordem que en el cas del grup formal G d'altura 1, tenim que $M_m = \mathrm{Spf}(O_{K_m})$, on K_m és el cos adjuntant els punts de π^m-torsió de G.
I que K_∞ de fet és la maxima extensió abeliana de K (si $K/\mathbb{Q}_p$ és no ramificada) ($\leftrightsquigarrow$ Teoria de cossos de classes local).
Per fer el canvi de base a $\mathbb{C}_p$ ens cal elegir un element t de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, topologicament nilpotent, i una colecció compatible d'arrels t^{1/q^n}.
Aleshores $M^0_{\infty,\overline{\eta}} = \mathrm{Spa}(A^\circ)$, on

$$A^\circ = \widehat{\left(\varinjlim A_m \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{K_m}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\right)}$$

$$\cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[X_1^{1/q^\infty}, X_2^{1/q^\infty}]]/(\delta(X_1, X_2)^{1/q^m} - t^{1/q^m})_m$$

Construcció del recobriment en nivell ∞

Prenem $M^0_{\infty,\overline{\eta}} \subset \mathbb{A}^{2,perf}$ en coordenades X_1 i X_2. Utilitzant l'acció del grup $(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$ podem considerar només un recobriment del affinoide

$$\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}.$$

Construcció del recobriment en nivell ∞

Prenem $M^0_{\infty,\overline{\eta}} \subset \mathbb{A}^{2,perf}$ en coordenades X_1 i X_2. Utilitzant l'acció del grup $(GL_2(K) \times D^\times)^{\det=N}$ podem considerar només un recobriment del affinoide

$$\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}.$$

Aquest recobriment vindrà determinat per parelles (x, n), on x serà un punt CM, i m un enter ≥ 0.

Construcció del recobriment en nivell ∞

Prenem $M^0_{\infty,\overline{\eta}} \subset \mathbb{A}^{2,perf}$ en coordenades X_1 i X_2. Utilitzant l'acció del grup $(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$ podem considerar només un recobriment del affinoide

$$\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}.$$

Aquest recobriment vindrà determinat per parelles (x, n), on x serà un punt CM, i m un enter ≥ 0.
De fet, utilitzant l'acció del grup només el definiriem per a dos punts CM molt concrets: el punt CM no ramificat standard, i el punt CM ramificat standard.

Construcció del recobriment en nivell ∞

Prenem $M^0_{\infty,\overline{\eta}} \subset \mathbb{A}^{2,perf}$ en coordenades X_1 i X_2. Utilitzant l'acció del grup $(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$ podem considerar només un recobriment del affinoide

$$\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}.$$

Aquest recobriment vindrà determinat per parelles (x, n), on x serà un punt CM, i m un enter ≥ 0.
De fet, utilitzant l'acció del grup només el definiriem per a dos punts CM molt concrets: el punt CM no ramificat standard, i el punt CM ramificat standard.
Per a fer-ho, primer definirem uns affinoides $\mathcal{Z}_{x,n}$, cumplint que

$$\mathcal{Z}_{x,n} \subset \mathcal{Z}_{x,n-1} \text{ per a tot } n \geq 0,$$

Construcció del recobriment en nivell ∞

Prenem $M^0_{\infty,\overline{\eta}} \subset \mathbb{A}^{2,perf}$ en coordenades X_1 i X_2. Utilitzant l'acció del grup $(GL_2(K) \times D^\times)^{\det=N}$ podem considerar només un recobriment del affinoide

$$\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}.$$

Aquest recobriment vindrà determinat per parelles (x, n), on x serà un punt CM, i m un enter ≥ 0.
De fet, utilitzant l'acció del grup només el definiriem per a dos punts CM molt concrets: el punt CM no ramificat standard, i el punt CM ramificat standard.
Per a fer-ho, primer definirem uns affinoides $\mathcal{Z}_{x,n}$, cumplint que

$$\mathcal{Z}_{x,n} \subset \mathcal{Z}_{x,n-1} \text{ per a tot } n \geq 0,$$

i que

$$\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{Z}_{x,n} = \{x\}.$$

Punts CM

Un punt de $x \in M_\infty(\mathbb{C}_p)$ ens determina un $\mathcal{O}_K$ modul formal $\mathbb{C}_p$. Diem que x és un punt CM si l'anell d'endomorfismes del $\mathcal{O}_K$ modul formal conté un ordre d'una extensió quadràtica L/K.

Punts CM

Un punt de $x \in M_\infty(\mathbb{C}_p)$ ens determina un $\mathcal{O}_K$ modul formal $\mathbb{C}_p$. Diem que x és un punt CM si l'anell d'endomorfismes del $\mathcal{O}_K$ modul formal conté un ordre d'una extensió quadràtica L/K.

Diem que x és no-ramificat (ramificat) si l'extensió L/K ho és.

Punts CM

Un punt de $x \in M_\infty(\mathbb{C}_p)$ ens determina un $\mathcal{O}_K$ modul formal $\mathbb{C}_p$. Diem que x és un punt CM si l'anell d'endomorfismes del $\mathcal{O}_K$ modul formal conté un ordre d'una extensió quadràtica L/K.

Diem que x és no-ramificat (ramificat) si l'extensió L/K ho és.

Utilitzant l'acció de $GL_2(K)$, podem veure que tot punt CM s'obté de dos punts CM concrets, un de no ramificat i l'altre de ramificat (que els diem punts standard).

Els affinodes subjacents

Donat un punt CM x, prenem

$$M_\infty(\mathbb{C}_p)) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{C}_p)$$

$$x \mapsto (x_1, x_2)$$

Un canvi de base lineal adequat du el punt (x_1, x_2) a un punt $(x_0, 0)$. Aquest mateix canvi de base ens determina noves variables (Y_1, Y_2). Donat $m \geq 0$, considerem els subdominis affinoides $\mathcal{Y}_{x,m}$ de $\mathbb{A}^2$ determinats per

$$\mathcal{Y}_{x,m} := \{|Y_i| \leq |x_0|_i^s\}$$

Els affinodes subjacents

Donat un punt CM x, prenem

$$M_\infty(\mathbb{C}_p)) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{C}_p)$$

$$x \mapsto (x_1, x_2)$$

Un canvi de base lineal adequat du el punt (x_1, x_2) a un punt $(x_0, 0)$. Aquest mateix canvi de base ens determina noves variables (Y_1, Y_2). Donat $m \geq 0$, considerem els subdominis affinoides $\mathcal{Y}_{x,m}$ de $\mathbb{A}^2$ determinats per

$$\mathcal{Y}_{x,m} := \{|Y_i| \leq |x_0|_i^s\}$$

on

- $s_1 = q^{2m}$, $s_2 = q^m$ si L/K no ramificat.
- $s_1 = q^m$, $s_2 = q^{m/2}$ si L/K ramificat, m parell.
- $s_1 = q^m$, $s_2 = \frac{(q+1)}{2} q^{(m+1)/2}$ si L/K ramificat, m senar.

Els affinodes subjacents

Dit d'una altra manera, $\mathcal{Y}_{x,m} \cong \mathrm{Spa}(R, R^+)$, on

$$R^+ = \mathcal{O}_{C_p}\langle Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}\rangle \text{ amb } Z_i := Y_i/x_0^{s_i}.$$

Els affinodes subjacents

Dit d'una altra manera, $\mathcal{Y}_{x,m} \cong \mathrm{Spa}(R, R^+)$, on

$$R^+ = \mathcal{O}_{C_p}\langle Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}\rangle \text{ amb } Z_i := Y_i/x_0^{s_i}.$$

La reducció de $\mathcal{Y}_{x,m}$ és isomorfa a

$$\mathrm{Spec}(\bar{k}[Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}]) = A_{\bar{k}}^{2,perf}.$$

Els affinodes subjacents

Dit d'una altra manera, $\mathcal{Y}_{x,m} \cong \mathrm{Spa}(R, R^+)$, on

$$R^+ = \mathcal{O}_{C_p}\langle Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}\rangle \text{ amb } Z_i := Y_i/x_0^{s_i}.$$

La reducció de $\mathcal{Y}_{x,m}$ és isomorfa a

$$\mathrm{Spec}(\bar{k}[Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}]) = A_{\bar{k}}^{2,perf}.$$

Els $\mathcal{Y}_{x,m}$ són com rectangles centrats en x,

$$\mathcal{Y}_{x,m} \subset \mathcal{Y}_{x,m-1} \text{ i } \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{Y}_{x,m} = \{x\}$$

Els affinodes subjacents

Dit d'una altra manera, $\mathcal{Y}_{x,m} \cong \mathrm{Spa}(R, R^+)$, on

$$R^+ = \mathcal{O}_{C_p}\langle Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}\rangle \text{ amb } Z_i := Y_i/x_0^{s_i}.$$

La reducció de $\mathcal{Y}_{x,m}$ és isomorfa a

$$\mathrm{Spec}(\bar{k}[Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}]) = A_{\bar{k}}^{2,perf}.$$

Els $\mathcal{Y}_{x,m}$ són com rectangles centrats en x,

$$\mathcal{Y}_{x,m} \subset \mathcal{Y}_{x,m-1} \text{ i } \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{Y}_{x,m} = \{x\}$$

Prenem ara

$$\mathcal{Z}_{x,m} := \mathcal{Y}_{x,m} \cap M_{\infty,\overline{\eta}}^{0,ad}.$$

Els affinodes subjacents

Dit d'una altra manera, $\mathcal{Y}_{x,m} \cong \mathrm{Spa}(R, R^+)$, on

$$R^+ = \mathcal{O}_{C_p}\langle Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}\rangle \text{ amb } Z_i := Y_i/x_0^{s_i}.$$

La reducció de $\mathcal{Y}_{x,m}$ és isomorfa a

$$\mathrm{Spec}(\bar{k}[Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}]) = A_{\bar{k}}^{2,perf}.$$

Els $\mathcal{Y}_{x,m}$ són com rectangles centrats en x,

$$\mathcal{Y}_{x,m} \subset \mathcal{Y}_{x,m-1} \text{ i } \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{Y}_{x,m} = \{x\}$$

Prenem ara

$$\mathcal{Z}_{x,m} := \mathcal{Y}_{x,m} \cap M_{\infty,\overline{\eta}}^{0,ad}.$$

que no és res més que la corba donada per $\delta(X_1, X_2) = t$ dins de $\mathcal{Y}_{x,m}$.

Els affinodes subjacents

Dit d'una altra manera, $\mathcal{Y}_{x,m} \cong \mathrm{Spa}(R, R^+)$, on

$$R^+ = \mathcal{O}_{C_p}\langle Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}\rangle \text{ amb } Z_i := Y_i/x_0^{s_i}.$$

La reducció de $\mathcal{Y}_{x,m}$ és isomorfa a

$$\mathrm{Spec}(\bar{k}[Z_1^{1/q^\infty}, Z_2^{1/q^\infty}]) = A_{\bar{k}}^{2,perf}.$$

Els $\mathcal{Y}_{x,m}$ són com rectangles centrats en x,

$$\mathcal{Y}_{x,m} \subset \mathcal{Y}_{x,m-1} \text{ i } \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{Y}_{x,m} = \{x\}$$

Prenem ara

$$\mathcal{Z}_{x,m} := \mathcal{Y}_{x,m} \cap M_{\infty,\overline{\eta}}^{0,ad}.$$

que no és res més que la corba donada per $\delta(X_1, X_2) = t$ dins de $\mathcal{Y}_{x,m}$.

La reducció de $\mathcal{Z}_{x,m}$ és calcula expressant

$$\delta(X_1, X_2) = t + f(Z_1, Z_2)t^r + \text{ (termes superiors)}$$

i surt (amb un morfisme a) la corba amb equació $f(Z_1, Z_2)$.

Les corbes reducció

Donat x un punt CM, i $m \geq 0$, considerem les corbes $C_{x,m} \subset \mathbb{A}_k^2$ sobre k donades per les següents equacions

Les corbes reducció

Donat x un punt CM, i $m \geq 0$, considerem les corbes $C_{x,m} \subset \mathbb{A}_k^2$ sobre k donades per les següents equacions

- $C_{x,0} : Z_1 Z_2^q - Z_1^q Z_2 = 1$, si x és no ramificat.

Les corbes reducció

Donat x un punt CM, i $m \geq 0$, considerem les corbes $C_{x,m} \subset \mathbb{A}_k^2$ sobre k donades per les següents equacions

- $C_{x,0} : Z_1 Z_2^q - Z_1^q Z_2 = 1$, si x és no ramificat.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^{q+1}$, si x és no ramificat i $m > 0$.

Les corbes reducció

Donat x un punt CM, i $m \geq 0$, considerem les corbes $C_{x,m} \subset \mathbb{A}_k^2$ sobre k donades per les següents equacions

- $C_{x,0} : Z_1 Z_2^q - Z_1^q Z_2 = 1$, si x és no ramificat.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^{q+1}$, si x és no ramificat i $m > 0$.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^2$, si x és ramificat i $m > 0$ senar.

Teorema La reducció de $\mathcal{Z}_{x,n}$ és isomorfa a la perfeccció de $C_{x,m}$.

Les corbes reducció

Donat x un punt CM, i $m \geq 0$, considerem les corbes $C_{x,m} \subset \mathbb{A}^2_k$ sobre k donades per les següents equacions

- $C_{x,0} : Z_1 Z_2^q - Z_1^q Z_2 = 1$, si x és no ramificat.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^{q+1}$, si x és no ramificat i $m > 0$.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^2$, si x és ramificat i $m > 0$ senar.

Teorema La reducció de $\mathcal{Z}_{x,n}$ és isomorfa a la perfeccció de $C_{x,m}$. A més podem descriure el subgrup $\mathcal{K}^1_{x,n} \subset (GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$ estabilitzador de $\mathcal{Z}_{x,n}$, i la seva acció a $C_{x,n}$.

Les corbes reducció

Donat x un punt CM, i $m \geq 0$, considerem les corbes $C_{x,m} \subset \mathbb{A}_k^2$ sobre k donades per les següents equacions

- $C_{x,0} : Z_1 Z_2^q - Z_1^q Z_2 = 1$, si x és no ramificat.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^{q+1}$, si x és no ramificat i $m > 0$.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^2$, si x és ramificat i $m > 0$ senar.

Teorema La reducció de $\mathcal{Z}_{x,n}$ és isomorfa a la perfeccció de $C_{x,m}$. A més podem descriure el subgrup $\mathcal{K}_{x,n}^1 \subset (GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$ estabilitzador de $\mathcal{Z}_{x,n}$, i la seva acció a $C_{x,n}$.
Per exemple, $\mathcal{K}_{x,0}^1 = L^*(\mathrm{GL}_2(O_K) \times O_D^*)^{\det = N}$ si x és no ramificat.

Les corbes reducció

Donat x un punt CM, i $m \geq 0$, considerem les corbes $C_{x,m} \subset \mathbb{A}_k^2$ sobre k donades per les següents equacions

- $C_{x,0} : Z_1 Z_2^q - Z_1^q Z_2 = 1$, si x és no ramificat.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^{q+1}$, si x és no ramificat i $m > 0$.
- $C_{x,m} : Z_1^q + Z_1 = Z_2^2$, si x és ramificat i $m > 0$ senar.

Teorema La reducció de $\mathcal{Z}_{x,n}$ és isomorfa a la perfeccció de $C_{x,m}$. A més podem descriure el subgrup $\mathcal{K}_{x,n}^1 \subset (GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$ estabilitzador de $\mathcal{Z}_{x,n}$, i la seva acció a $C_{x,n}$.
Per exemple, $\mathcal{K}_{x,0}^1 = L^*(\mathrm{GL}_2(O_K) \times O_D^*)^{\det=N}$ si x és no ramificat.

- També es pot deduïr al final que surt $C_{x,m} = \mathbb{P}^1$, si x és ramificat i $m > 0$ parell.

Alguns comentaris

Pot ser perfectament que $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,m}$, però només si $n = m$, i els dos són ramificats o no ramificats.

Alguns comentaris

Pot ser perfectament que $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,m}$, però només si $n = m$, i els dos són ramificats o no ramificats.

Si $\mathcal{Z}_{x,n} \cap \mathcal{Z}_{y,n} \neq \emptyset$, aleshores

Alguns comentaris

Pot ser perfectament que $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,m}$, però només si $n = m$, i els dos són ramificats o no ramificats.

Si $\mathcal{Z}_{x,n} \cap \mathcal{Z}_{y,n} \neq \emptyset$, aleshores

- O bé $n = 0$, x és no ramificat i y és ramificat

Alguns comentaris

Pot ser perfectament que $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,m}$, però només si $n = m$, i els dos són ramificats o no ramificats.

Si $\mathcal{Z}_{x,n} \cap \mathcal{Z}_{y,n} \neq \emptyset$, aleshores

- O bé $n = 0$, x és no ramificat i y és ramificat
- o bé els dos son no ramificats o els dos no ramificats i $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,n}$.

Alguns comentaris

Pot ser perfectament que $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,m}$, però només si $n = m$, i els dos són ramificats o no ramificats.

Si $\mathcal{Z}_{x,n} \cap \mathcal{Z}_{y,n} \neq \emptyset$, aleshores

- O bé $n = 0$, x és no ramificat i y és ramificat
- o bé els dos son no ramificats o els dos no ramificats i $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,n}$.

Denotem el morfisme reducció per

$$red_{x,n} : \mathcal{Z}_{x,n} \to \overline{\mathcal{Z}_{x,n}}$$

Alguns comentaris

Pot ser perfectament que $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,m}$, però només si $n = m$, i els dos són ramificats o no ramificats.

Si $\mathcal{Z}_{x,n} \cap \mathcal{Z}_{y,n} \neq \emptyset$, aleshores

- O bé $n = 0$, x és no ramificat i y és ramificat
- o bé els dos son no ramificats o els dos no ramificats i $\mathcal{Z}_{x,n} = \mathcal{Z}_{y,n}$.

Denotem el morfisme reducció per

$$red_{x,n} : \mathcal{Z}_{x,n} \to \overline{\mathcal{Z}_{x,n}}$$

Denotem per $S_{x,n}$ el conjunt de imatges per $red_{x,n}$ de punts CM de $\mathcal{Z}_{x,n}$.

Els molt oberts perfectoïdes $W_{x,n}$

Sigui x un dels dos punts CM standards (que no he definit!), a dins de $\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}$

Els molt oberts perfectoïdes $W_{x,n}$

Sigui x un dels dos punts CM standards (que no he definit!), a dins de $\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}$
Pel cas ramificat definim

$$W_{x,0} := \{|X_1| \geq |X_2| > |X_1|^q\} \setminus \bigcup_{y \in S_{x,0}} \mathcal{Z}_{x,2}$$

Els molt oberts perfectoïdes $W_{x,n}$

Sigui x un dels dos punts CM standards (que no he definit!), a dins de $\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}$
Pel cas ramificat definim

$$W_{x,0} := \{|X_1| \geq |X_2| > |X_1|^q\} \setminus \bigcup_{y \in S_{x,0}} \mathcal{Z}_{x,2}$$

Pel cas no ramificat definim

$$W_{x,0} := \{|X_1| > |X_2| \geq |X_1|^q\} \setminus \bigcup_{y \in S_{x,0}} \mathcal{Z}_{x,2}$$

Els molt oberts perfectoïdes $W_{x,n}$

Sigui x un dels dos punts CM standards (que no he definit!), a dins de $\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}$
Pel cas ramificat definim

$$W_{x,0} := \{|X_1| \geq |X_2| > |X_1|^q\} \setminus \bigcup_{y \in S_{x,0}} \mathcal{Z}_{x,2}$$

Pel cas no ramificat definim

$$W_{x,0} := \{|X_1| > |X_2| \geq |X_1|^q\} \setminus \bigcup_{y \in S_{x,0}} \mathcal{Z}_{x,2}$$

I ara, en general, definim per $n > 0$

Els molt oberts perfectoïdes $W_{x,n}$

Sigui x un dels dos punts CM standards (que no he definit!), a dins de $\mathcal{F} := \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}$
Pel cas ramificat definim

$$W_{x,0} := \{|X_1| \geq |X_2| > |X_1|^q\} \setminus \bigcup_{y \in S_{x,0}} \mathcal{Z}_{x,2}$$

Pel cas no ramificat definim

$$W_{x,0} := \{|X_1| > |X_2| \geq |X_1|^q\} \setminus \bigcup_{y \in S_{x,0}} \mathcal{Z}_{x,2}$$

I ara, en general, definim per $n > 0$ Pel cas ramificat definim

$$W_{x,n} := red^{-1}_{x,n-1}(\bar{x}) \setminus \bigcup_{y \in S_{x,n}} \mathcal{Z}_{x,n+1}$$

El recobriment perfectoïde

Utilitzant l'acció de $(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$, definim, per $g \in (GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$, l'obert

$$W_{x^g, n} := W_{x,n}^g.$$

El recobriment perfectoïde

Utilitzant l'acció de $(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$, definim, per $g \in (GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$, l'obert

$$W_{x^g, n} := W_{x,n}^g.$$

Aleshores $W_{x,n}$ ens dóna un recobriment de

$$M_{\infty, \overline{\eta}}^{0, noCM} := M_{\infty, \overline{\eta}}^{0, ad} \setminus \{ \text{ punt CM } \}.$$

El recobriment perfectoïde

Utilitzant l'acció de $(GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$, definim, per $g \in (GL_2(K) \times D^\times)^{\det = N}$, l'obert

$$W_{x^g,n} := W_{x,n}^g.$$

Aleshores $W_{x,n}$ ens dóna un recobriment de

$$M_{\infty,\overline{\eta}}^{0,noCM} := M_{\infty,\overline{\eta}}^{0,ad} \setminus \{ \text{ punt CM } \}.$$

En efecte, sols cal veure-ho per $\mathcal{F} :=:= \{|X_1| \geq |X_2| \geq |X_1|^q\}$. Es clar de la definició que tot punt de $\mathcal{F}$ que no està en algun $\mathcal{Z}_{x,n}$ està cobert. Però

$$\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{Z}_{x,n} = \{x\}$$

i per tant queden coberts tots els punts menys el punts CM.

El recobriment semiestable en nivell m

L'aplicació

$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{m,\overline{\eta}}$$

envia els $W_{x,n}$ a molt oberts.

El recobriment semiestable en nivell m

L'aplicació

$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{m,\overline{\eta}}$$

envia els $W_{x,n}$ a molt oberts.

El recobriment obtingut és un recobriment semiestable de $M^{ad,\text{no CM}}_{m,\overline{\eta}}$.

El recobriment semiestable en nivell m

L'aplicació

$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{m,\overline{\eta}}$$

envia els $W_{x,n}$ a molt oberts.

El recobriment obtingut és un recobriment semiestable de $M^{ad,\text{no CM}}_{m,\overline{\eta}}$.

Les components irreductibles de la reducció del model associat

El recobriment semiestable en nivell m

L'aplicació

$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{m,\overline{\eta}}$$

envia els $W_{x,n}$ a molt oberts.

El recobriment obtingut és un recobriment semiestable de $M^{ad,\text{no CM}}_{m,\overline{\eta}}$.

Les components irreductibles de la reducció del model associat (i.e. La reducció dels affinoides subjacents)

El recobriment semiestable en nivell m

L'aplicació
$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{m,\overline{\eta}}$$
envia els $W_{x,n}$ a molt oberts.
El recobriment obtingut és un recobriment semiestable de $M^{ad,\text{no CM}}_{m,\overline{\eta}}$.
Les components irreductibles de la reducció del model associat (i.e. La reducció dels affinoides subjacents) tenen morfismes purament inseparables a certs quocients de les corbes $C_{x,n}$ d'abans, respecte el grup

$$\mathcal{K}^1_{x,m} \cap \Gamma^1(\pi^m) \text{ , on } \Gamma^1(\pi^m) = \Gamma(\pi^m) \cap SL_2(K)$$

El recobriment semiestable en nivell m

L'aplicació

$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{m,\overline{\eta}}$$

envia els $W_{x,n}$ a molt oberts.
El recobriment obtingut és un recobriment semiestable de $M^{ad,\text{no CM}}_{m,\overline{\eta}}$.
Les components irreductibles de la reducció del model associat (i.e. La reducció dels affinoides subjacents) tenen morfismes purament inseparables a certs quocients de les corbes $C_{x,n}$ d'abans, respecte el grup

$$\mathcal{K}^1_{x,m} \cap \Gamma^1(\pi^m) \text{ , on } \Gamma^1(\pi^m) = \Gamma(\pi^m) \cap SL_2(K)$$

Això de fet és veu ja que ens dóna un isomorfisme a la cohomologia.

El recobriment semiestable en nivell m

L'aplicació

$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{m,\overline{\eta}}$$

envia els $W_{x,n}$ a molt oberts.

El recobriment obtingut és un recobriment semiestable de $M^{ad,\text{no CM}}_{m,\overline{\eta}}$.

Les components irreductibles de la reducció del model associat (i.e. La reducció dels affinoides subjacents) tenen morfismes purament inseparables a certs quocients de les corbes $C_{x,n}$ d'abans, respecte el grup

$$\mathcal{K}^1_{x,m} \cap \Gamma^1(\pi^m) \text{ , on } \Gamma^1(\pi^m) = \Gamma(\pi^m) \cap SL_2(K)$$

Això de fet és veu ja que ens dóna un isomorfisme a la cohomologia.

A més, si m és prou gran, les components irreductibles són les $C_{x,n}$

El recobriment semiestable en nivell m

L'aplicació

$$M^{ad}_{\infty,\overline{\eta}} \to M^{ad}_{m,\overline{\eta}}$$

envia els $W_{x,n}$ a molt oberts.

El recobriment obtingut és un recobriment semiestable de $M^{ad,\text{no CM}}_{m,\overline{\eta}}$.

Les components irreductibles de la reducció del model associat (i.e. La reducció dels affinoides subjacents) tenen morfismes purament inseparables a certs quocients de les corbes $C_{x,n}$ d'abans, respecte el grup

$$\mathcal{K}^1_{x,m} \cap \Gamma^1(\pi^m) \text{ , on } \Gamma^1(\pi^m) = \Gamma(\pi^m) \cap SL_2(K)$$

Això de fet és veu ja que ens dóna un isomorfisme a la cohomologia.

A més, si m és prou gran, les components irreductibles són les $C_{x,n}$ (mòdul morfisme purament inseparable).

La torre de models

Utilitzant els recobriments de $M_{m,\overline{\eta}}^{ad,noCM}$ obtenim uns models semiestables formals amb morfismes finits

$$\widehat{\mathcal{M}}_m^{noCM} \to \widehat{\mathcal{M}}_{m-1}^{noCM}$$

La torre de models

Utilitzant els recobriments de $M^{ad,noCM}_{m,\overline{\eta}}$ obtenim uns models semiestables formals amb morfismes finits

$$\widehat{\mathcal{M}}^{noCM}_{m} \to \widehat{\mathcal{M}}^{noCM}_{m-1}$$

Aquests morfismes ens determinen morfismes entre components irreductibles C_m de nivells m a $m-1$.

La torre de models

Utilitzant els recobriments de $M_{m,\overline{\eta}}^{ad,noCM}$ obtenim uns models semiestables formals amb morfismes finits

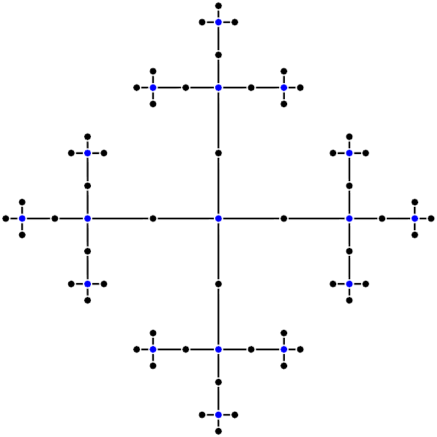
$$\widehat{\mathcal{M}}_m^{noCM} \to \widehat{\mathcal{M}}_{m-1}^{noCM}$$

Aquests morfismes ens determinen morfismes entre components irreductibles C_m de nivells m a $m-1$.

EL limit $\lim_{\leftarrow} C_m$ és la perfecció d'una de les corbes anteriors.

El graf de la reducció

Els vertexos del tipus $(x, 0)$. Els blaus són no ramificats, els negres ramificats.

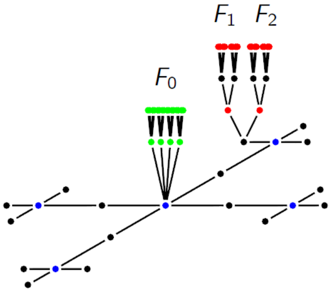


Legend

- $xy^p - x^p y = 1$
- $\mathbf{P}^1$

El graf de la reducció

Els vertexos del tipus (x, n). Els blaus són no ramificats, els vermells ramificats.



Legend

- blue: $xy^p - x^p y = 1$
- green: $y^p + y = x^{p+1}$
- red: $y^p - y = x^2$
- black: $\mathbf{P}^1$

- $F_i/\mathbf{Q}_p$ are quad. extns.
- $F_0/\mathbf{Q}_p$ is unramified.
- A vertex labeled F_i $\leftrightarrow$ a Gal. rep. of the form $\mathrm{Ind}_{F_i/\mathbf{Q}_p}\theta$.

Models estables de la corba modular X_n

Per tal obtenir el graf dual de la reducció del model estable de X_n, el que hem de fer és

Models estables de la corba modular X_n

Per tal obtenir el graf dual de la reducció del model estable de X_n, el que hem de fer és

- Primer calcular el graf quocient $\mathcal{T}^\circ/\Gamma^1(p^m)$, on

$$\Gamma^1(p^m) = (1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)) \cap SL_2(\mathbb{Q}_p)$$

Models estables de la corba modular X_n

Per tal obtenir el graf dual de la reducció del model estable de X_n, el que hem de fer és

- Primer calcular el graf quocient $\mathcal{T}^\circ/\Gamma^1(p^m)$, on

$$\Gamma^1(p^m) = (1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)) \cap SL_2(\mathbb{Q}_p)$$

- Calcular, per a cada vèrtex v del graf, la corba C_v i el quocient amb $\Gamma^1(p^m) \cap \mathcal{K}_v^1$

Models estables de la corba modular X_n

Per tal obtenir el graf dual de la reducció del model estable de X_n, el que hem de fer és

- Primer calcular el graf quocient $\mathcal{T}^\circ/\Gamma^1(p^m)$, on

$$\Gamma^1(p^m) = (1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)) \cap SL_2(\mathbb{Q}_p)$$

- Calcular, per a cada vèrtex v del graf, la corba C_v i el quocient amb $\Gamma^1(p^m) \cap \mathcal{K}_v^1$ (i en particular, els infinits que són $\cong \mathbb{P}^1$).

Models estables de la corba modular X_n

Per tal obtenir el graf dual de la reducció del model estable de X_n, el que hem de fer és

- Primer calcular el graf quocient $\mathcal{T}^\circ/\Gamma^1(p^m)$, on
$$\Gamma^1(p^m) = (1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)) \cap SL_2(\mathbb{Q}_p)$$
- Calcular, per a cada vèrtex v del graf, la corba C_v i el quocient amb $\Gamma^1(p^m) \cap \mathcal{K}_v^1$ (i en particular, els infinits que són $\cong \mathbb{P}^1$).
- El graf resultat té un nombre finit de finals: els dels punts CM, i els de la frontera. Esborrem el vèrtexs racionals dels finals.

Models estables de la corba modular X_n

Per tal obtenir el graf dual de la reducció del model estable de X_n, el que hem de fer és

- Primer calcular el graf quocient $\mathcal{T}^\circ/\Gamma^1(p^m)$, on
$$\Gamma^1(p^m) = (1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)) \cap SL_2(\mathbb{Q}_p)$$
- Calcular, per a cada vèrtex v del graf, la corba C_v i el quocient amb $\Gamma^1(p^m) \cap \mathcal{K}_v^1$ (i en particular, els infinits que són $\cong \mathbb{P}^1$).
- El graf resultat té un nombre finit de finals: els dels punts CM, i els de la frontera. Esborrem el vèrtexs racionals dels finals.
- Als de la frontera, tants com $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, queda un vèrtex v amb C_v no racional. El graf que resulta li diem $\mathcal{T}_m$.

Models estables de la corba modular X_n

Per tal obtenir el graf dual de la reducció del model estable de X_n, el que hem de fer és

- Primer calcular el graf quocient $\mathcal{T}^\circ/\Gamma^1(p^m)$, on

$$\Gamma^1(p^m) = (1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)) \cap SL_2(\mathbb{Q}_p)$$

- Calcular, per a cada vèrtex v del graf, la corba C_v i el quocient amb $\Gamma^1(p^m) \cap \mathcal{K}_v^1$ (i en particular, els infinits que són $\cong \mathbb{P}^1$).
- El graf resultat té un nombre finit de finals: els dels punts CM, i els de la frontera. Esborrem el vèrtexs racionals dels finals.
- Als de la frontera, tants com $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, queda un vèrtex v amb C_v no racional. El graf que resulta li diem $\mathcal{T}_m$.
- Considerem la corba d'Igusa $Ig(p^n)$. Posem un vertèx w amb aquesta corba per a cada punt de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.

Models estables de la corba modular X_n

Per tal obtenir el graf dual de la reducció del model estable de X_n, el que hem de fer és

- Primer calcular el graf quocient $\mathcal{T}^\circ/\Gamma^1(p^m)$, on

$$\Gamma^1(p^m) = (1 + p^m M_2(\mathbb{Z}_p)) \cap SL_2(\mathbb{Q}_p)$$

- Calcular, per a cada vèrtex v del graf, la corba C_v i el quocient amb $\Gamma^1(p^m) \cap \mathcal{K}_v^1$ (i en particular, els infinits que són $\cong \mathbb{P}^1$).
- El graf resultat té un nombre finit de finals: els dels punts CM, i els de la frontera. Esborrem el vèrtexs racionals dels finals.
- Als de la frontera, tants com $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, queda un vèrtex v amb C_v no racional. El graf que resulta li diem $\mathcal{T}_m$.
- Considerem la corba d'Igusa $Ig(p^n)$. Posem un vertèx w amb aquesta corba per a cada punt de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$.
- Per cada punt supersingular de $X_1(N)(\overline{\mathbb{F}_p})$ prenem una copia de $\mathcal{T}_m$, i les enganxem entre si enganxant cada vèrtex w associat a un punt de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ amb el corresponent vertex v.

Aquest poema no vols dir res

Aquest poema no vols dir res
i tanmateix ja ha dit massa

Aquest poema no vols dir res
i tanmateix ja ha dit massa

Moltes gràcies!